Dr. Emanuel Scheidegger
Dr. Christoph Kawan

Topologie
SS 10

Institut für Mathematik
Universität Augsburg

Übungsblatt 4

Differentiale, Vektorfelder etc.

13. Untermannigfaltigkeiten.

   (a) (2 Punkte) Es sei $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ eine glatte Abbildung und $x \in \mathbb{R}^n$ ein regulärer Wert von f. Zeigen Sie, daß $f^{-1}(x)$ eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^m$ der Dimension $m - n$. Benutzen Sie dazu den Satz über implizite Funktionen.

   (b) (2 Punkte) Es sei $f : M \to N$ eine glatte Abbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeiten. Das Differential $\mathrm{d}f_p$ habe konstanten Rang k für jedes $p \in M$. Dann ist für jedes $q \in f(M)$ die Menge $f^{-1}(q) \subset M$ eine Untermannigfaltigkeit der Dimension $\dim M - k$.

14. Die Pullback–Abbildung für Differentialformen.
   Es seien $U \in \mathbb{R}^n$ und $V \in \mathbb{R}^m$ offene Mengen, $f : U \to V$ eine glatte Abbildung und $f^* : \Omega^*(V) \to \Omega^*(U)$ die Pullback–Abbildung. Zeigen Sie, daß gilt:

   (a) (1 Punkt) f^* ist linear.

   (b) (1 Punkt) $f^*(\omega \wedge \tau) = f^*\omega \wedge f^*\tau$ für $\omega, \tau \in \Omega^*(V)$.

   (c) (1 Punkt) Sei $W \in \mathbb{R}^k$ eine offene Menge und $g : V \to W$ eine glatte Abbildung. Dann gilt für $\omega \in \Omega^*(W)$: $f^*(g^*\omega) = (g \circ f)^*\omega$.

   (d) (1 Punkt) Es sei $\mathrm{id}_U : U \to U$ die Identitätsabbildung. Dann gilt für $\omega \in \Omega^*(U)$: $\mathrm{id}_U^*\omega = \omega$.

15. Eigenschaften von Differentialen

   (a) (2 Punkte) Matrixdarstellung
   Seien M, N glatte Mannigfaltigkeiten der Dimensionen m und n, $f : M \to N$ eine glatte Abbildung und $p \in M$. Seien (U, ϕ) und (V, ψ) Karten um p bzw. $f(p)$ mit $f(U) \subset V$, so dass $x = \phi(p) \in \mathbb{R}^m$ bzw. $y = \psi(f(p)) \in \mathbb{R}^n$. Bestimmen

Sie die darstellende Matrix des Differentials $\mathrm{d}f_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ bezüglich der Basen $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}|_p\right\}_{i=1}^m$ für T_pM und $\left\{\frac{\partial}{\partial y^j}|_{f(p)}\right\}_{j=1}^n$ für $T_{f(p)}N$.

(b) (2 Punkte) Kettenregel
Seien M, N und f wie oben, P eine glatte Mannigfaltigkeit und $g : N \to P$ eine glatte Abbildung. Zeigen Sie, daß für das Differential der zusammengesetzten Abbildung $g \circ f : M \to P$ gilt:

$$\mathrm{d}(g \circ f)|_p = \mathrm{d}g|_{f(p)} \circ \mathrm{d}f|_p.$$

16. Lie–Klammer
Seien $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ zwei glatte Vektorfelder auf einer glatten Mannigfaltigkeit M. Die Lie–Klammer ist das wie folgt definierte Vektorfeld:

$$\forall p \in M,\ \forall f \in C^\infty(M): \qquad [X,Y]_p(f) = X_p(Y(f)) - Y_p(X(f)).$$

(a) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß für alle $p \in M$ die Abbildung $p \mapsto [X,Y]_p$ ein glattes Vektorfeld ist, und drücken Sie es in Koordinaten $x = \phi(p)$ in einer Karte (U, ϕ) um p aus.

(b) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß $(X, Y) \mapsto [X, Y]$ eine $\mathbb{R}$-bilineare und antisymmetrisch Abbildung ist, sowie die Jacobi–Identität

$$[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$$

erfüllt. Das rechtfertigt die Bezeichnung Lie–Klammer für $[X, Y]$.

(c) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß die Lie–Klammer nicht $C^\infty(M)$–bilinear ist.

(d) (1 Punkt) Seien M, N und f wie in Aufgabe 15(a). Seien $V, W \in \mathfrak{X}(N)$, so daß $\mathrm{d}f|_p(X_p) = V_{f(p)}$ und $\mathrm{d}f|_p(Y_p) = W_{f(p)}$ für alle $p \in M$. Zeigen Sie, daß dann $\mathrm{d}f|_p([X,Y]_p) = [V,W]_{f(p)}$ für beliebiges p gilt.

Abgabetermin: Freitag, 21. 5. 2010 um 10:00 Uhr.